

Московский Государственный Университет  
имени М.В. Ломоносова

МОСКОВСКАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

---

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«Теория вероятностей и математическая  
статистика»

Направление 080100 Экономика

для подготовки студентов – бакалавров (магистров)  
очного отделения

Автор – составитель программы: д.ф.-м. н., проф. В.К.Малиновский

Учебная программа утверждена  
решением Учебного совета МШЭ МГУ  
Протокол № \_\_\_\_ от «\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2009 г.

Москва  
2009

## Введение

Учебная программа по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» разработана в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования Министерства образования и науки Российской Федерации.

Рабочая программа соответствует учебному плану подготовки бакалавров (магистров) по направлению 080100 «Экономика».

Изучение курса «Теория вероятностей и математическая статистика» предназначено для формирования и усвоения знаний, умений, навыков в области экономической теории и практики, которые необходимы для работы в государственных и частных структурах, а также развития профессиональных качеств, компетенций, необходимых для выполнения функциональных обязанностей в сфере экономики.

**Основные задачи** преподавания дисциплины:

- ознакомление студентов с основными концепциями теории вероятностей и прикладной статистики,
- раскрытие роли вероятностно-статистического инструментария в экономических исследованиях,
- изучение основных понятий вероятностного анализа, таких как случайные события и вероятности их осуществления, случайные величины и распределения, а также основных теорем теории вероятностей; изучение основ статистического описания данных, постановок и методов решения фундаментальных задач математической статистики, таких как задача оценивания, задача проверки гипотез; изучение основ анализа парных зависимостей,
- формирование вероятностной интуиции, опирающейся на теоретические знания, развитие навыков постановки и решения прикладных задач статистического анализа,
- демонстрация математической обоснованности ряда процедур вероятностного и статистического анализа и понимание границ их применимости,
- привитие практических навыков в использовании математических методов вероятностного и статистического анализа к постановке и решению задач, возникающих из экономической практики.

В результате изучения курса студенты должны

**знать:**

- основные определения и понятия теории вероятностей и математической статистики,
- основы методики применения вероятностных и статистических методов,
- содержание теоретико-вероятностного способа рассуждений в прикладной статистике и эконометрике,
- основные типы распределений вероятностей, используемых в статистическом анализе,
- прикладные аспекты предельных теорем теории вероятностей, в том числе — применительно к теории оптимального оценивания и оптимальной проверки гипотез.

**уметь:**

- свободно производить аналитические действия со случайными событиями и вероятностями их осуществления,

- свободно производить аналитические действия со случайными величинами и их характеристиками, уметь оперировать с наиболее употребимыми в практике статистических исследований законами распределений,
- интерпретировать аналитические результаты вероятностного анализа в терминах качественного поведения случайных величин, статистических критериев и статистических оценок,
- рассчитывать численные значения теоретически обоснованных процедур, в том числе — уметь рассчитать численные значения статистических оценок при заданных выборочных значениях,
- применять методы статистического и вероятностного анализа в задачах, возникающих из экономической практики,

**владеть:**

- основными аналитическими приемами вероятностного и статистического анализа,
- методиками проведения расчетов, включая применение асимптотических методов,
- навыками численного расчета основных характеристик, возникающих при проведении вероятностного и статистического анализа в задачах, возникающих из экономической практики,

**быть ознакомленными:**

- с основами математико-статистического инструментария экономических исследований,
- иметь представление о предмете и методах аналитической теории вероятностей, включая закономерности, возникающие при взаимодействии большого числа зависимых и независимых случайных факторов,

**иметь представление:**

- об основах применения математико-статистического инструментария в исследовании социально-экономических объектов, в анализе реальных статистических данных, возникающих при наблюдении за социально-экономическим объектом.

**Практическая реализация учебной программы** предусматривает проведение аудиторных занятий в виде

- лекций,
- семинарских занятий,
- консультаций,

а также в виде самостоятельной работы студентов.

Дисциплина изучается в течение одного учебного года при общем объеме учебной нагрузки **170 часов**. Итоговый контроль — в форме

- экзамена в конце первого полугодия,
- экзамена в конце второго полугодия.

## Учебно–тематический план

№ лекций	Название раздела, темы	Всего часов		
		лекции	семинары	самост. работа
	<b>Раздел I «Теория вероятностей» (ТВ)</b>	<b>28</b>	<b>26</b>	<b>26</b>
1	Тема I.1 — Введение в курс: теория вероятностей, математическая статистика, теория риска, случайные процессы, эконометрика и многомерный статистический анализ, их взаимосвязь и роль в экономических исследованиях.	2	—	—
2–4	Тема I.2 — Правила действий со случайными событиями и вероятностями их осуществления.	6	6	6
5–9	Тема I.3 — Случайные величины, распределения вероятностей и основные числовые характеристики (включая многомерный случай).	10	10	10
10, 11	Тема I.4 — Распределения вероятностей, наиболее распространенные в социально–экономических исследованиях.	4	4	4
12–14	Тема I.5 — Основные результаты ТВ: преобразования случайных величин, неравенство Чебышева, закон больших чисел, центральная предельная теорема.	6	6	6
	<b>Раздел II «Математическая статистика» (МС)</b>	<b>32</b>	<b>32</b>	<b>26</b>
15–17	Тема II.1 — Основы статистического описания: генеральная совокупность, выборка, основные выборочные характеристики и анализ их поведения, статистика нормального закона, вариационный ряд и порядковые статистики.	6	6	6
18, 19	Тема II.2 — Статистическое оценивание параметров, статистики, статистические оценки и их свойства. Функция правдоподобия наблюдений: количество информации, содержащейся в $n$ наблюдениях относительно неизвестного значения параметра.	4	4	4
20–24	Тема II.3 — Статистическое оценивание параметров: неравенство информации, методы оценивания, построение интервальных оценок.	10	10	4
25–26	Тема II.4 — Статистическая проверка гипотез: основные типы статистических критериев, их общая логическая схема, лемма Неймана–Пирсона о наиболее мощном критерии, критерии согласия, однородности и др.	4	4	4
27–30	Тема II.5 — Статистический анализ парных зависимостей.	8	8	8
	<b>Итого (Разделы I и II):</b>	<b>60</b>	<b>58</b>	<b>52</b>

**Самостоятельная работа** предусматривает изучение основной ([1], [2]) и дополнительной ([3]–[11]) учебной литературы, а также выполнение домашних заданий и подготовку сообщений на семинарских занятиях.

## Краткое содержание курса

Основным учебным пособием, с которым согласованы лекционные и семинарские занятия, является учебник С.А. Айвазяна и В.С. Мхитаряна «Прикладная статистика в задачах и упражнениях» [1]. Тематика лекций соотносится с содержанием учебника [1] следующим образом.

В Разделе I «Теория вероятностей»:

№ лекций	Название раздела, темы	Основная литература (главы и пункты учебника [1])
1	Тема I.1 — Введение в курс: теория вероятностей, математическая статистика, теория риска, случайные процессы, эконометрика и многомерный статистический анализ, их взаимосвязь и роль в экономических исследованиях.	В.1–В.3
2–4	Тема I.2 — Правила действий со случайными событиями и вероятностями их осуществления.	гл. 1
5–9	Тема I.3 — Случайные величины, распределения вероятностей и основные числовые характеристики (включая многомерный случай).	гл. 2, пп. 3.1.4, 3.1.5
10, 11	Тема I.4 — Распределения вероятностей, наиболее распространенные в социально-экономических исследованиях.	гл. 3
12–14	Тема I.5 — Основные результаты ТВ: преобразования случайных величин, неравенство Чебышева, закон больших чисел, центральная предельная теорема.	гл. 4

В Разделе II «Математическая статистика»:

№ лекций	Название раздела, темы	Основная литература (главы и пункты учебника [1])
15–17	Тема II.1 — Основы статистического описания: генеральная совокупность, выборка, основные выборочные характеристики и анализ их поведения, статистика нормального закона, вариационный ряд и порядковые статистики.	гл. 6
18, 19	Тема II.2 — Статистическое оценивание параметров, статистики, статистические оценки и их свойства. Функция правдоподобия наблюдений: количество информации, содержащейся в $n$ наблюдениях относительно неизвестного значения параметра.	пп. 7.1, 7.2
20–24	Тема II.3 — Статистическое оценивание параметров: неравенство информации, методы оценивания, построение интервальных оценок.	гл. 7 (без пп. 7.1 и 7.2)
25–26	Тема II.4 — Статистическая проверка гипотез: основные типы статистических критериев, их общая логическая схема, лемма Неймана–Пирсона о наиболее мощном критерии, критерии согласия, однородности и др.	гл. 8 (без п. 8.5)
27–30	Тема II.5 — Статистический анализ парных зависимостей.	гл. 10

## Планы семинарских занятий

Проведение семинарских занятий координируется с тематикой лекций и проводится по следующему плану.

В Разделе I «Теория вероятностей»:

№ семинарских занятий	Название темы семинарского занятия	Основная литература (главы и пункты учебника [1])
1 (по Теме I.2)	Случайные события и правила действий с ними. Вероятности и правила действий с ними.	гл. 1; шп. 1.1.2, 1.1.3
2 (по Теме I.2)	Вероятностное пространство. Условная вероятность. Независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.	гл. 1, п. 1.1.3
3 (по Теме I.2)	Непрерывное вероятностное пространство. Аксиоматика Колмогорова.	гл. 1, п. 1.1.3
4 (по Теме I.3)	Понятие о случайных величинах, примеры случайных величин. Типы случайных величин.	гл. 2; шп. 2.1–2.3
5 (по Теме I.3)	Законы распределения случайных величин и способы их задания. Одномерный случай.	гл. 2, шп. 2.4, 2.5.1–2.5.2
6 (по Теме I.3)	Законы распределения случайных величин и способы их задания. Многомерный случай. Независимость случайных величин. Формула свертки.	гл. 2, шп. 2.5.3
7 (по Теме I.3)	Основные числовые характеристики одномерных случайных величин (математическое ожидание и моменты, мода, медиана, дисперсия, среднеквадратическое отклонение, квантили и процентные точки распределения, асимметрия и эксцесс). Примеры.	гл. 2, шп. 2.6.1–2.6.5
8 (по Теме I.3)	Основные числовые характеристики многомерных случайных величин. Примеры.	гл. 2, шп. 2.6.6
9 (по Теме I.4)	Дискретные одномерные и многомерные распределения (Бернулли, биномиальное, отрицательно биномиальное, гипергеометрическое, Пуассона, мультиномиальное). Непрерывные одномерные и многомерные распределения (нормальное одномерное и многомерное, логнормальное, равномерное, распределения Вейбулла, показательное, Парето и Коши).	гл. 3; шп. 3.1.1–3.1.10
10 (по Теме I.4)	Распределения вероятностей, представляющие наибольший интерес для статистического анализа (Хи-квадрат, Стьюдента, $F$ -распределение, Гамма-распределение, Бета-распределение).	гл. 3; шп. 3.2.1–3.2.5
11 (по Теме I.5)	Неравенство Чебышева. Доказательство. Примеры применения.	гл. 4; п. 4.1
12 (по Теме I.5)	Закон больших чисел. Примеры применения.	гл. 4; п. 4.2
13 (по Теме I.5)	Центральная предельная теорема. Примеры применения. Примеры неприменимости (в связи с нарушением условий).	гл. 4; п. 4.3

В Разделе II «Математическая статистика»:

№ семинарских занятий	Название темы семинарского занятия	Основная литература (главы и пункты учебника [1])
15 (по Теме II.1)	Генеральная совокупность, выборка, основные выборочные характеристики.	гл. 6
16 (по Теме II.1)	Анализ поведения основных выборочных характеристик. Статистика нормального закона.	гл. 6
17 (по Теме II.1)	Вариационный ряд и порядковые статистики.	гл. 6
18 (по Теме II.2)	Статистическое оценивание параметров, статистики, точечные оценки и их основные свойства (состоятельность, несмещенность, эффективность).	п. 7.1
19 (по Теме II.2)	Функция правдоподобия. Количество информации, содержащейся в $n$ наблюдениях относительно неизвестного значения параметра. Примеры.	п. 7.2
20 (по Теме II.3)	Неравенство Рао-Крамера (неравенство информации) и эффективность оценок.	гл. 7; п. 7.3
21 (по Теме II.3)	Метод максимального правдоподобия.	гл. 7; п. 7.5.1
22 (по Теме II.3)	Метод моментов.	гл. 7; п. 7.5.2
23 (по Теме II.3)	Примеры построения оценок по методу максимального правдоподобия и по методу моментов. Понятие о свойствах оценок максимального правдоподобия.	гл. 7; пп. 7.5.1, 7.5.2
24 (по Теме II.3)	Понятие об интервальных оценках. Построение интервальных оценок (доверительных областей).	гл. 7; пп. 7.4, 7.5.4
25 (по Теме II.4)	Статистическая проверка гипотез: основные типы статистических критериев, их общая логическая схема, лемма Неймана–Пирсона о наиболее мощном критерии.	гл. 8; пп. 8.1–8.5
26 (по Теме II.4)	Критерии согласия и однородности.	гл. 8; п. 8.6
27 (по Теме II.5)	Постановка задачи статистического анализа парных зависимостей.	гл. 10; п. 10.1
28 (по Теме II.5)	Основные цели и инструментарий статистического исследования зависимостей.	гл. 10; п. 10.5
29 (по Теме II.5)	Элементы регрессионного анализа. Примеры.	гл. 10; п. 10.5
30 (по Темам II.1–II.5)	Итоговые замечания по курсу.	

## Порядок проведения промежуточного и итогового контроля

Промежуточный контроль осуществляется в процессе обучения, преимущественно на семинарских занятиях, а также путем заслушивания кратких сообщений студентов при проведении консультаций. По результатам промежуточного контроля

проставляются текущие оценки и в учетных ведомостях, которые ведет преподаватель.

Итоговый контроль проводится в форме предварительного анализа суммы промежуточных оценок и выведения результирующей оценки путем проведения **экзамена** (в конце первого полугодия) и **экзамена** (в конце второго полугодия).

## Контрольные вопросы для подготовки к экзамену

В Разделе I «Теория вероятностей»:

1. Понятие о случайном эксперименте и о его исходах.
2. Пространство элементарных событий (исходов). Примеры пространств элементарных событий в дискретном случае.
3. Элементы комбинаторики (число выборов при выборе с возвращением и без возвращения из генеральной совокупности, число перестановок, число сочетаний).
4. Случайное событие. Объединение (сумма), пересечение (произведение), разность, дополнение событий, достоверное и невозможное событие.
5. Полная система событий. Примеры.
6. Понятие вероятности события. Вероятностное пространство. Примеры.
7. Сложение вероятностей (аддитивность).
8. Умножение вероятностей. Условная вероятность. Примеры.
9. Независимость двух событий. Взаимная независимость многих событий.
10. Формула полной вероятности.
11. Формула Байеса.
12. Понятие о случайной величине. Типы случайных величин.
13. Понятие о законе распределения вероятностей случайной величины.
14. Закон распределения вероятностей многомерной случайной величины. Маргинальные распределения.
15. Функция распределения одномерной случайной величины и способы ее задания в дискретном и непрерывном случаях.
16. Функция плотности вероятности одномерной случайной величины.
17. Многомерные функции распределения и плотности.
18. Независимость и формула свертки в дискретном и в непрерывном случаях.
19. Математическое ожидание. Числовые (моментные) характеристики распределения вероятностей.
20. Основные числовые (моментные) характеристики многомерных распределений вероятностей.
21. Свойства основных дискретных распределений (Бернулли, геометрического, биномиального, Пуассона).
22. Свойства основных непрерывных распределений (равномерного, Симпсона, треугольного, нормального,  $\chi^2$ -распределения, показательного, Гамма-распределения, Коши, Лапласа).
23. Неравенство Чебышева (с доказательством). Примеры применения.
24. Закон больших чисел (с доказательством). Примеры применения.
25. Центральная предельная теорема. Примеры применения.
26. Многомерная центральная предельная теорема.

В Разделе II «Математическая статистика»:

1. Понятие о генеральной совокупности и выборке. Распределение простой случайной выборки.
2. Вариационный ряд и его члены: порядковые (ранговые) статистики. Распределение максимального и минимального члена вариационного ряда.
3. Распределение  $m$ -ого члена вариационного ряда.
4. Эмпирическая функция распределения. Два эквивалентных определения эмпирической функции распределения.
5. Эмпирическая функция распределения при росте объема выборки. Теорема Гливенко. Теорема Колмогорова.
6. Математическое ожидание и дисперсия эмпирической функции распределения.
7. Распределение эмпирической функции распределения и его связь с биномиальным распределением.
8. Основные выборочные (эмпирические) характеристики: выборочное среднее, выборочная дисперсия, выборочные степенные моменты.
9. Понятие о статистической устойчивости выборочных характеристик. Понятие об асимптотической нормальности.
10. Распределение выборочных характеристик нормальной совокупности.
11. Постановка задачи статистического (точечного) оценивания в параметрическом семействе. Понятие о статистических (точечных) оценках. Функция потерь, риск оценки.
12. Состоятельность статистических (точечных) оценок. Примеры.
13. Несмещенность и асимптотическая несмещенность статистических (точечных) оценок. Примеры.
14. Функция правдоподобия. Количество информации Фишера. Примеры.
15. Неравенство Рао-Крамера (с доказательством).
16. Эффективность несмещенных (точечных) оценок. Примеры.
17. Принцип максимального правдоподобия. Построение точечных оценок по методу максимального правдоподобия. Примеры.
18. Построение точечных оценок по методу моментов. Примеры.
19. Понятие об интервальном оценивании и  $\gamma$ -доверительных интервалах.
20. Интервальная оценка среднего нормальной совокупности при известной и неизвестной дисперсии.
21. Интервальная оценка дисперсии нормальной совокупности при известном и неизвестном среднем.
22. Постановка задачи проверки гипотез в параметрическом семействе. Примеры простых и сложных гипотез в статистике.
23. Понятие о статистическом критерии. Ошибка первого и второго рода. Размер и мощность критерия.
24. Отношение правдоподобия (логарифм отношения правдоподобия). Критерии отношения правдоподобия для различных гипотез. Их свойства.
25. Критерии проверки гипотез (простых и сложных) о среднем нормального закона.
26. Критерии проверки гипотез (простых и сложных) о дисперсии нормального закона.
27. Критерии согласия и критерии однородности. Понятие о задаче статистического исследования зависимостей. Понятие о регрессионном анализе. Примеры.

## Литература

- [1] Айвазян, С.А., Мхитарян, В.С. (2001) *Прикладная статистика и основы естествознания* (2-е изд.). Том 1: Теория вероятностей и прикладная статистика. — М.: ЮНИТИ, 656 с.
- [2] Айвазян, С.А., Мхитарян, В.С. (2001) *Прикладная статистика в задачах и упражнениях*. — М.: ЮНИТИ, 270 с.

## Дополнительная литература

- [3] Большев Л.Н., Смирнов Н.В. (1965) *Таблицы математической статистики*. М.: Наука.
- [4] Воинов В.Г., Никулин М.С. (1989) *Несмещенные оценки и их применения*. М.: Наука.
- [5] Гнеденко Б.В. (2001) *Курс теории вероятностей*. 7-е изд., М.: УРСС.
- [6] Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. (1985) *Справочник по теории вероятностей и математической статистике*. М.: Наука.
- [7] Крамер Г. (1975) *Математические методы статистики*. 2-е изд., М.: Мир.
- [8] Леман Э. (1979) *Проверка статистических гипотез*. М.: Наука.
- [9] Леман Э. (1991) *Теория точечного оценивания*. М.: Наука.
- [10] Феллер В. (1967) *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. т. 2, М.: Мир.
- [11] Ширяев А.Н. (1980) *Вероятность*. М.: Наука.